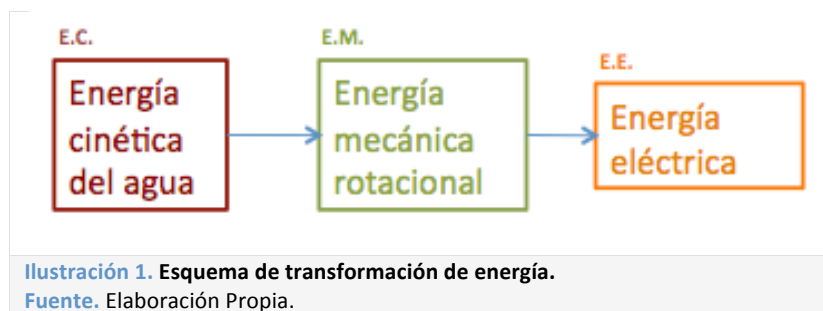


ANEXO E. MÉTODO ANALÍTICO

Una turbo-máquina hidráulica es un sistema que transforman la energía hidráulica, cinética o potencial, en energía mecánica de rotación y viceversa (Maldonado, 2005).

En general, éste sistema se conforma de componentes fijos: difusor, distribuidor y anclaje; y componentes móviles: rotor o rodete, transmisión y generador. El rotor posee un numero de terminado de alabes, y entre ellos existen espacios libres o canales por donde circula el agua (Fernandez, 2008).

En la Ilustración 1 se muestra el proceso de transformación de energía, en el cual el agua intercambia energía con el rotor, que gira alrededor de su eje de simetría. Así mismo, éste se acopla a un moto-generador, para transformar la energía mecánica en energía eléctrica.



Cabe aclarar que en cada etapa de transformación de energía se ocasionan perdidas de energía, determinadas por la eficiencia de los componentes, las cuales se detallaran más adelante.

De acuerdo con lo anterior, para estudiar la turbo máquinas se analizan fenómenos de régimen permanente (Estacionario) con velocidad de rotación y caudal constante (Fernandez, 2008). Sin embargo para puntos de potencia máxima se analiza el fenómeno de régimen transitorio, debido a que el torque en el rotor varía en función

de la fuerza electromotriz¹, es decir a mayor consumo de energía mayor es el torque o carga en el eje del rotor, por lo que el intercambio de energía entre el fluido y el rotor varía en función de dicha fuerza.

Los métodos utilizados para su estudio son: analítico, experimental y análisis dimensional.

Tabla 1. Métodos de estudio.

Método	Definición
Analítico	Se fundamenta en el estudio del movimiento del fluido a través de los álabes, según los principios de la Mecánica de Fluidos.
Experimental	Se fundamenta en la formulación empírica de la Hidráulica, y la experimentación. Incluye análisis numérico por medio de software CAE.
Análisis dimensional	Ofrece grupos de relaciones entre las variables que intervienen en el proceso, confirmando los coeficientes de funcionamiento de las turbo-máquinas, al igual que los diversos números adimensionales que proporcionan información sobre la influencia de las propiedades del fluido en movimiento a través de los órganos que las componen.

Fuente. Elaboración Propia. Información tomada de (Fernandez, 2008)

1.1 CONCEPTOS GENERALES

A continuación se enuncian las consideraciones básicas para comprender en detalle el proceso de transformación de energía.

1.1.1 Consideraciones básicas de energía.

Para entender la transferencia de energía en la turbo-máquinas desde el fluido hasta la electricidad, siendo éste un fenómeno complejo de la mecánica de fluidos, es esencial ilustrar las consideraciones simples del flujo y los triángulos de velocidades (Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009).

El movimiento del agua es la fuente de energía para las turbinas hidráulicas. Si se observa una hélice girando sumergida en el agua, ésta es movida por un motor a una velocidad angular, ω . La velocidad tangencial (U) con la que se mueve las aspas es igual a $U=\omega r$, donde r es la distancia radial desde el eje hasta el extremo del aspa. La

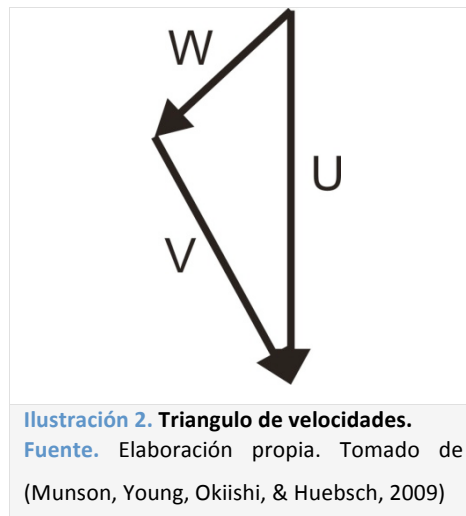
¹ La fuerza electromotriz (FEM) (Representado con el símbolo griego ξ) es toda causa capaz de mantener una diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito abierto o de producir una corriente eléctrica en un circuito cerrado. Es una característica de cada generador eléctrico. Se define como el trabajo que el generador realiza para pasar por su interior la unidad de carga positiva del polo negativo al positivo. (Fuerza electromotriz:Wikipedia)

velocidad absoluta del fluido (que puede ser apreciada por un observador externo) se denomina V , y la velocidad relativa del fluido con respecto a la velocidad rotacional de las aspas U , se denomina W (Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009). El vector de velocidad absoluta es la sumatoria de la velocidad relativa y la velocidad de las aspas. (Ver Ilustración 2)

$$V = W + U \text{ [m/s]}$$

Ecuación 1. Velocidad Absoluta

Fuente: (Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009)



Este triángulo de velocidades aplica para tanto para la entrada del fluido en la hélice (V_1)(rotor) como para la salida (V_2)

1.1.2 Consideraciones básicas de momento angular

La transferencia de energía disponible de un fluido a una turbina se debe a la interacción entre el rotor en movimiento y el fluido. Debido a que la turbo-máquinas describen una rotación alrededor de un eje, su desempeño se analiza en términos de torque y momento angular (Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009).

Una manera de estimar el torque τ en el eje de una turbo máquina es siguiendo el método de momento angular (Pujol, Sola, Montoro, & Pelegrí, 2010)(Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009)(White, 2003), para lo cual se considera el volumen de control cv .

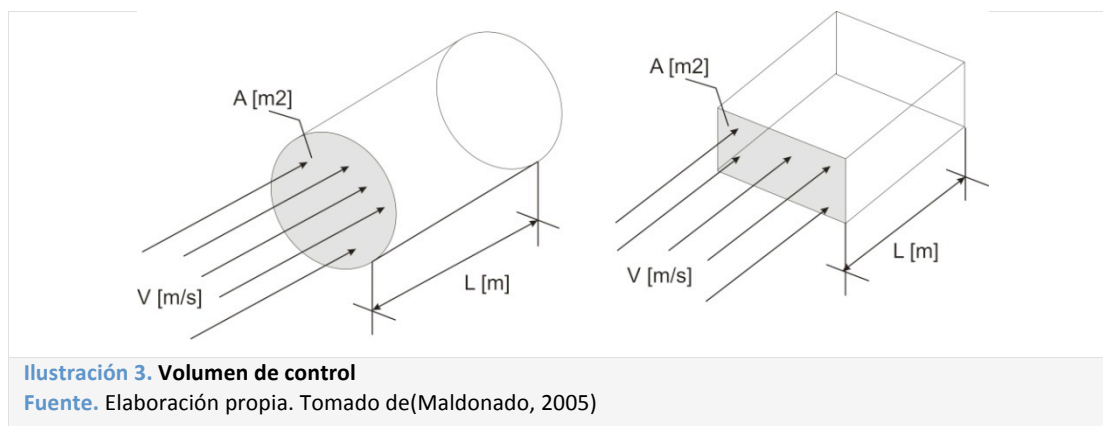
$$\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \int_{cv} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA$$

Ecuación 2. Momento Angular.

Fuente: (Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009)

El torque es el producto de un brazo por una fuerza originada en el cambio de impulso del flujo de agua (Maldonado, 2005). Como en un proceso estacionario el flujo de masa es constante y la rotación del rotor tiene lugar en el volumen fijo del proceso, este cambio de impulso, depende solamente del cambio de la velocidad absoluta a través del volumen fijo (Maldonado, 2005). Este volumen fijo es conocido también como volumen de control (cv). Se entiende por volumen de control: una región de interés en el espacio a través de cuyas fronteras entra y sale continuamente un fluido; la frontera del volumen de control es conocida como superficie de control (Duarte, 2008)

Para el caso de las turbo-máquinas, la superficie de control es el área proyectada por los álabes (A) de la Ilustración 3. Por lo tanto el volumen de control es aquel espacio delimitado por la geometría de los alabes por donde entra y sale el fluido. Las fronteras del volumen del control están determinadas por la geometría de los alabes, que varía según el tipo de turbo-máquina. (Ver Ilustración 3)



El torque en el eje de una turbo-máquina, que aplica un fluido cuando intercepta el rotor en un volumen de control (esto se aplica a ductos rectos, sin ángulos relativos entre la superficie de entrada y salida), con una sección (1) de entrada y (2) de salida, se expresa como:

$$T_{eje} = -m(r_1 V_1) + m(r_2 V_2) \quad [Nm]$$

Ecuación 3. Torque en el eje.

Fuente: (Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009)

Ésta ecuación también se conoce como la ecuación de Euler, donde $m=\rho Q$, ρ es densidad del fluido (kg/m^3), y Q es el caudal [m^3/s]

La potencia en el eje relaciona el torque en el eje y la velocidad angular de ésta manera:

$$W_{\text{eje}} = T_{\text{eje}} \omega \quad [\text{W}]$$

Ecuación 4. Potencia en el eje

Fuente: (Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009)

$$W_{\text{eje}} = -m(U_1 V_1) + m(U_2 V_2) \quad [\text{W}]$$

Ecuación 5. Potencia en el eje

Fuente: (Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009)

Esta ecuación aplica a una transferencia de energía ideal, sin considerar perdidas por eficiencias.

1.1.3 Fuerza de Arrastre

Una manera de expresar la fuerza ejercida por el agua sobre un álabe, es por medio de la fuerza de arrastre (F_A) que sufre un cuerpo inmerso. Esta es una fuerza de resistencia al movimiento, debida al efecto neto de la presión ejercida por el fluido y del esfuerzo de corte producido por la viscosidad del fluido. La fuerza resultante de ambas contribuciones se denomina “arrastre” (Vera, 2002). La expresión general para el arrastre sobre cuerpos sumergidos es:

$$F_A = C_D \rho A \frac{v^2}{2} \quad [\text{N}]$$

Ecuación 6. Fuerza de Arrastre

Fuente:(Vera, 2002)

Donde:

A = es el área normal proyectada en dirección del flujo [m^2].

v = velocidad [m/s].

ρ = densidad del fluido [kg/m^3].

C_D = Coeficiente de Arrastre.

Este último es un número adimensional, que es función de la forma del cuerpo y del número de Reynolds.

1.1.4 Principio de Bernoulli y Cabezal de Presión

El principio de Bernoulli describe el comportamiento de un fluido moviéndose a lo largo de una línea de corriente.

En hidráulica es común expresar la energía en términos de longitud, y se habla de altura o cabezal. Así en la ecuación de Bernoulli los términos suelen llamarse alturas o cabezales de velocidad, de presión y cabezal hidráulico. (Principio de Bernoulli: Wikipedia, 2009)

$$\underbrace{\frac{V^2}{2g}}_{\text{cabezal de velocidad}} + \underbrace{\frac{P}{\gamma}}_{\text{cabezal de presión}} + z = \underbrace{H}_{\text{Cabezal o Altura hidráulica}}$$

Ilustración 4. Cabezal hidráulico.
Fuente. (Principio de Bernoulli: Wikipedia, 2009)

Donde:

V = velocidad del fluido en la sección considerada [m/s].

g = aceleración gravitatoria [m/s²]

z = altura en la dirección de la gravedad desde una cota de referencia [m].

P = presión a lo largo de la línea de corriente [Pa].

ρ = densidad del fluido [kg/m³].

De acuerdo con lo anterior, para turbinas hidro-cinéticas, la presión que ejerce el fluido al penetrar el rodete, es el cabezal de velocidad (Behrens, 2005), expresado como:

$$H = \frac{V^2}{2g} \quad [m]$$

Ecuación 7. Cabezal de velocidad

Fuente: (Behrens, 2005)

Para esto el término de cabezal de presión se elimina asumiendo este valor similar a la presión atmosférica.

De donde:

$$V = (2gH)^{1/2} \quad [m/s]$$

Ecuación 8. Velocidad

Fuente: (Principio de Bernoulli: Wikipedia, 2009)

1.1.5 Potencia hidráulica

Para un generador hidro-cinético la potencia disponible en el fluido se conoce como potencia hidráulica (Ph). Ésta es la energía cinética por unidad de tiempo que lleva la corriente de agua antes de penetrar en el rotor (Maldonado, 2005). Para esto se selecciona un volumen de control **cv**, equivalente a la cantidad de agua que intercepta el rotor en un área de barrido **A**.

Ahora bien, la energía que puede aprovechar la turbina hidro cinética depende del área barrida, la longitud y el número de palas o alabes del rotor.

La potencia hidráulica, debida a la energía cinética (Maldonado, 2005), se puede determinar analíticamente por medio de la siguiente ecuación:

$$P = E_c/t = \frac{1}{2} m v^2 \quad [Jules/t]$$

Ecuación 9. Potencia-Energía cinética

Fuente: (Maldonado, 2005)

Entonces:

$$P_h = \frac{1}{2} \rho Q v^2 \quad [W]$$

Ecuación 10. Potencia hidráulica –Energía cinética

Fuente: (Maldonado, 2005)

$$P_h = \frac{1}{2} \rho A C^3 \quad [W]$$

Donde:

ρ = densidad del fluido [kg/m^3].

$v=C$ = velocidad absoluta [m/s]

$Q= A \cdot C$ (Caudal disponible en la superficie de control a la velocidad absoluta)
[m^2/s]

1.1.6 Potencia Mecánica

La potencia mecánica es la potencia transmitida desde el fluido a elementos motrices mediante la acción de fuerzas físicas de contacto o elementos mecánicos asociados como palancas, engranajes, etc. El caso más simple es el de una partícula libre sobre la que actúa una fuerza variable (Potencia: Wikipedia, 2008). De acuerdo con la mecánica clásica, el trabajo realizado sobre la partícula es igual a la variación de su energía cinética (energía de movimiento), por lo que la potencia desarrollada por la fuerza es:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{d}{dt} (m \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

$$P = F v \quad [W]$$

Ecuación 11. Potencia mecánica (fuerza)

Fuente: (Potencia: Wikipedia, 2008)

Donde:

E_c = Energía cinética de la partícula [Joules]

m = masa de la partícula [kg]

F = la fuerza resultante que actúa sobre la partícula [N].

v = la velocidad de la partícula [m/s].

En sistemas mecánicos más complejos con elementos rotativos alrededor de un eje fijo y donde el momento de inercia permanece constante, la potencia mecánica puede relacionarse con el par motor y la velocidad angular. De acuerdo con la mecánica clásica, el trabajo realizado sobre el cuerpo en rotación es igual a la variación de su energía cinética de rotación (Potencia: Wikipedia, 2008), por lo que la potencia desarrollada por el par o momento de fuerza es:

$$P = \frac{dW_{\text{rot}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I_r \omega^2 \right) = M \omega$$

Fuente: (Potencia: Wikipedia, 2008)

Donde:

I_r = momento de inercia según el eje de giro [Nm].

ω = es la velocidad angular del eje [rad/s].

M = es el par motor aplicado sobre dicho eje [kg/m²].

$$P = M \omega \quad [\text{W}]$$

Ecuación 12. Potencia (Momento angular)

Fuente: (Potencia: Wikipedia, 2008)

Por otro lado considerando la potencia en el eje en función de la fuerza de arrastre F_A (Ecuación 6) al relacionarla con la Ecuación 11, la potencia se expresa así:

$$P = F_A v = C_D \rho A \frac{v^2}{2} v \quad [\text{W}]$$

$$P_{\text{eje}} = \frac{1}{2} C_D \rho A v^3 \quad [\text{W}]$$

Ecuación 13. Potencia (fuerza de Arrastre)

Fuente: (Maldonado, 2005)

Esta expresión de potencia mecánica es equivalente a potencia hidráulica (Ecuación 10) disponible que lleva la corriente de agua multiplicada por un coeficiente de eficiencia o rendimiento (los detalles de calculo se indican más adelante).

1.1.7 Eficiencia Total y Pérdidas de energía en un generador hidro-cinético

En realidad no es posible transformar toda la energía disponible en el fluido en un área de barrido de una corriente de agua, ya que para ceder toda la energía cinética ésta se tendría que detener, cosa que no se puede lograr en un flujo libre. Además por tratarse de un sistema conformado por diferentes componentes, el flujo de energía a través de los componentes se pierde en una cantidad determinada por la eficiencia de cada componente.

η_r = rendimiento del rotor; también conocido como C_p coeficiente de potencia (Maldonado, 2005) o C_D coeficiente de arrastre (Vera, 2002).

η_{tr} = rendimiento de la transmisión.

η_g = rendimiento del generador.

$$\eta_T = \eta_r \times \eta_{tr} \times \eta_g$$

Ecuación 14. Eficiencia total

Fuente: (Maldonado, 2005)

De esta manera se establece que para la Ecuación 13:

$$P_e = \frac{1}{2} \rho A v^3 \eta_T \text{ [W]}$$

Ecuación 15. Potencia efectiva

Fuente: (Maldonado, 2005)

Donde P_e es la potencia efectiva del sistema [W].

Por otro lado, es frecuente encontrar la aplicación de la expresión Ecuación 15 para el análisis de las turbinas de reacción como propelas y hélices. Para el caso de las turbinas de acción, como la rueda Pelton, la expresión utilizada para el análisis es:

$$P_{mec} = \gamma Q H \text{ [W]}$$

Ecuación 16. Potencia Mecánica (Pelton)

Fuente: (Camacho)

Donde:

γ = peso específico del agua; $\gamma= \rho g$ [kg/ms]

g = coeficiente de gravedad; $g=9.8$ [m/s²]

Q = Caudal [m³/s]

Entonces, para determinar la potencia efectiva a partir de la Ecuación 16, se obtiene:

$$P_e = \gamma Q H \eta_T \quad [W]$$

Ecuación 17. Potencia Efectiva (Pelton)

Fuente: (Camacho)

1.2 MODELOS TEÓRICOS SIMPLES

Con el propósito de comparar la potencia efectiva entregada por dos tipos de turbinas, se identificaron modelos teóricos para cada tipo, tal como se muestran a continuación.

1.2.1 Modelo teórico de una turbina de acción

Como turbina de acción se seleccionó el caso más simple de turbinas de este tipo: Rueda Hidráulica. De acuerdo con esto se determinó el modelo teórico (Tabla 2) con base en el modelo teórico propuesto por (Behrens, 2005).

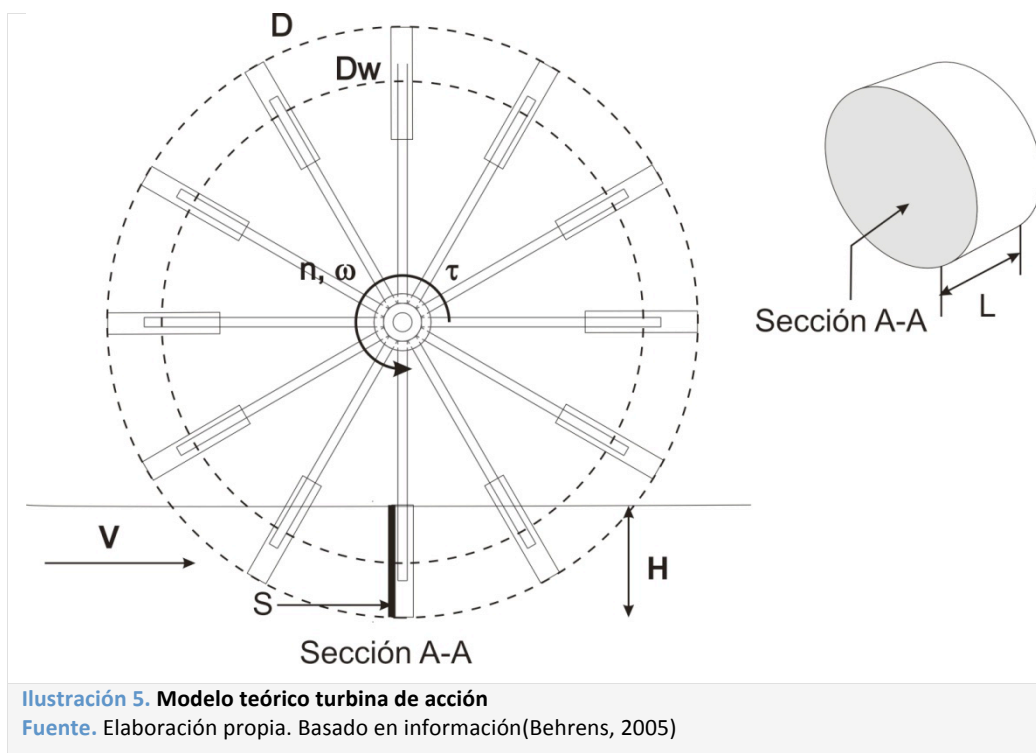


Tabla 2. Modelo teórico de una turbina de acción.

Parámetro	Ecuación	Unidades	Descripción
V	Dato conocido	[m/s]	Velocidad del fluido, parámetro de entrada para el análisis
H	$H = V^2 / 2g$	[m]	Cabezal de presión dinámica
g	$g = 9.8$	[m/s ²]	Coeficiente de gravedad
D	$D = 6;3 H$	[m]	El diámetro para el rotor de una rueda hidráulica debe ser entre 6 y 3 veces la cabezal de presión. (sugerido por el autor)

D_w	$D_w = D - H$	[m]	El diámetro de trabajo D _w , equivale al punto medio de la pala, donde el volumen de control ejerce la fuerza.
P_e	$P_e = D_w \pi$	[m]	Perímetro del rotor
S	$S = H$	[m]	Longitud sumergida de la pala equivalente a la cabeza.
z	$z = P_e / H$	#	El número de la palas, z, se determina dejando una separación entre palas equivalente a la cabeza.
η_r	$\eta_r = 67-90\%$	#	Coeficiente de eficiencia del rotor para ruedas hidráulicas está entre los valores dados
n	$n = (v \eta) 60 / P_e$	[rpm]	Revoluciones por minuto del rotor
ω	$\omega = \pi n / 30$	[rad/s]	Velocidad angular del rotor
L	Dato conocido	[m]	Longitud del rotor
A	$A = S L$	[m ²]	Área de la pala sumergida
Q	$Q = A V$	[m ³ /s]	Caudal del fluido en el área de la pala
ρ	$\rho = 1000$	[kg/m ³]	Densidad del agua
Peje	$P = 1/2 \rho Q V^2$	[W]	Potencia en el eje
τ	$\tau = P / \omega$	[Nm]	Torque en el eje

Fuente. Elaboración propia.

1.2.2 Modelo teórico de una turbina de reacción

Se obtuvo otro modelo teórico correspondiente a una propela comercial. De acuerdo con esto se determinó el modelo teórico (Tabla 3) con base en el modelo teórico propuesto en (Maldonado, 2005).

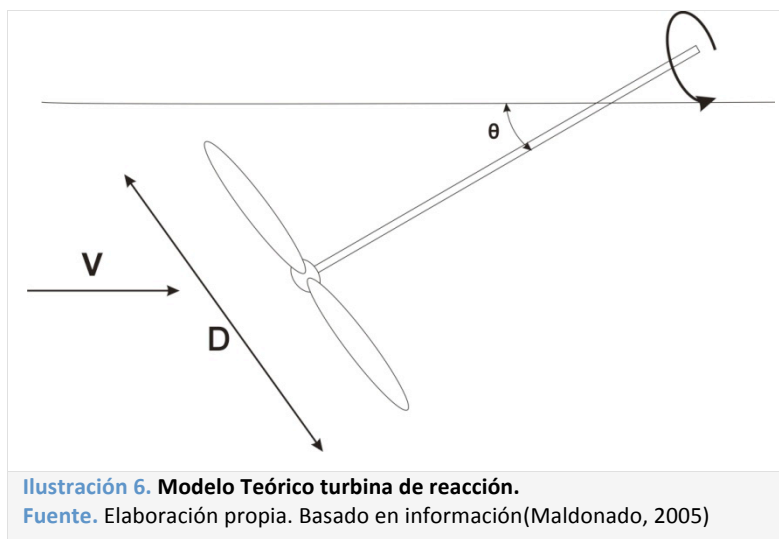


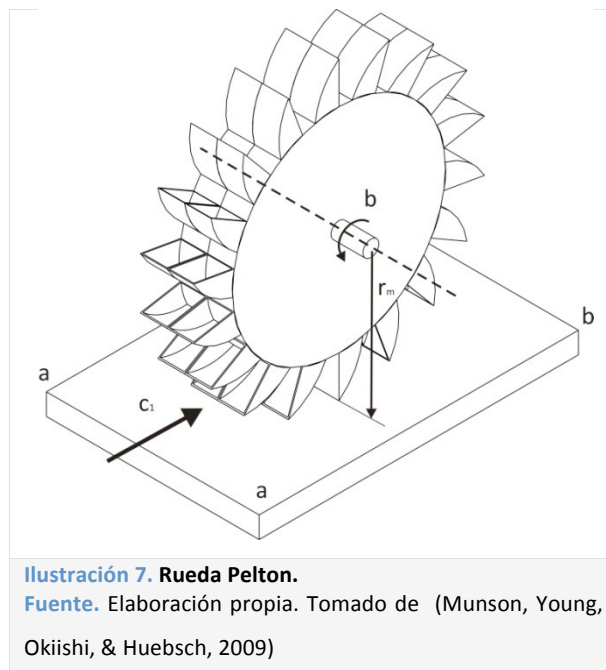
Tabla 3. Modelo teórico de una turbina de reacción.

Parámetro	Ecuación	Unidades	Descripción
D	Dato conocido	[m]	Diámetro externo del rotor (cuando el diámetro del eje es despreciable)
A	$A=(\pi/4) D^2$	[m ²]	El área de barrido del rotor equivale al círculo que describe el movimiento del alabe.
θ	Dato conocido	[grados]	Es el grado de inclinación del eje del rotor, que equivale al ángulo de incidencia de la velocidad sobre el rotor. θ=0 para turbinas axiales horizontales.
v	Dato conocido	[m/s]	Velocidad absoluta del agua al interceptar el rotor.
ρ	ρ= 1000	[kg/m ³]	Densidad del flujo de agua
P_h	$P_h=(1/2) \rho A v^3 \cos\theta$	[W]	Potencia Hidráulica
P_r	$P_r=P_h \eta_r$	[W]	Potencia en el eje del rotor
P_t	$P_t= P_r \eta_t$	[W]	Potencia en el eje de transmisión
P_g	$P_e= P_t \eta_g$	[W]	Potencia a la salida del generador

Fuente. Elaboración propia.

1.3 MÉTODO ANALÍTICO PARA ROTOR DE IMPULSO

Existen gran cantidad de métodos para turbinas de impulso, sin embargo, quizás el más fácil de entender es el de la rueda Pelton (la relación entre el fluido portador de energía y la turbo maquina) (Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009)(Ver Ilustración 7). Por esta razón el método analítico que se expone a continuación está basado en expresiones asociadas a la Rueda Pelton. Esté sirvió como referencia para analizar el rotor de acción seleccionado para el presente proyecto.

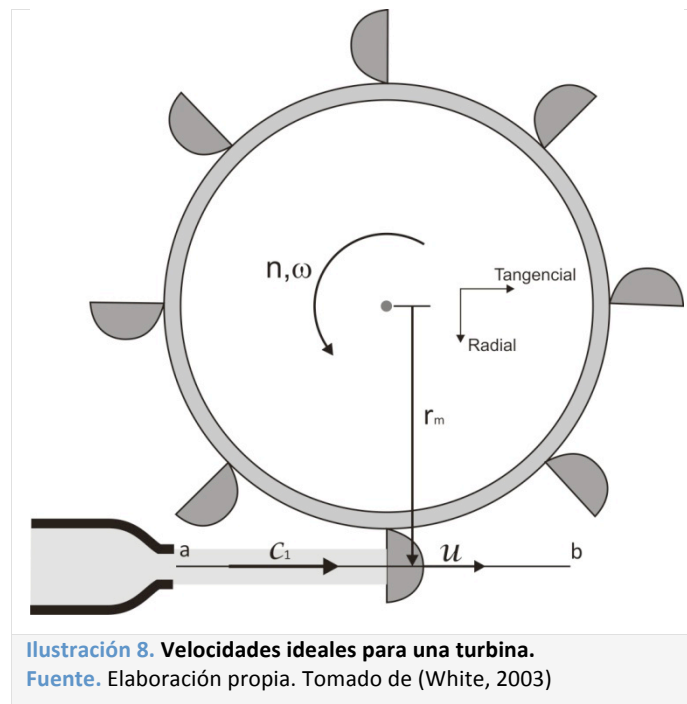


Es importante aclarar que para el análisis se asume una situación ideal, en la que no se consideran variables dinámicas que podrían hacer más complejo el análisis, para esto se estudia el fenómeno en 2D y se simplifican las variables para determinar los puntos máximos de eficiencia. Además, para este método analítico se debe considerar, tal como lo indican los autores (Fernandez, 2008)(Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009)(White, 2003), que los resultados hallados por medio de estos modelos son

aproximaciones relevantes que describen el fenómeno, pero en la práctica pueden llegar a variar e incluso ser inexactos.

1.3.1 Velocidades en una turbina de impulso

De acuerdo con Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, el agua entra y sale del volumen de control (bajo presión atmosférica). Suponiendo que una persona estuviera en la pala notaría que la velocidad del agua no cambia mientras se desliza por la pala (sin considerar los efectos de la fricción y viscosidad). Esto significa que la velocidad relativa del agua no cambia, pero su dirección sí. El cambio de dirección del fluido ocasiona un torque en el rotor, lo que genera potencia mecánica en la turbina. Idealmente el fluido entra y sale del volumen de control sin ningún componente radial (ver Ilustración 8).



Según lo anterior y de acuerdo con las consideraciones básicas de energía (Ver numeral 1.1.1) para el estudio del movimiento del agua se utiliza una nomenclatura universal que define los triángulos de velocidades, a la entrada y salida del rotor o rodete (Fernandez, 2008).

Tabla 4. Nomenclatura Universal de velocidades.

Nomenclatura Universal para triángulos de velocidades	
u	velocidad tangencial o velocidad del alabe
c	velocidad absoluta del agua, en ocasiones se conoce como v
w	velocidad relativa del agua
α	ángulo que forman las velocidades u y c
β	ángulo que forman las velocidades u y w
0	Subíndice referente a la entrada del agua en la corona directriz o distribuidor
1	Subíndice referente a la entrada del agua en el rodete
2	Subíndice referente a la salida del agua del rodete

Fuente: (Fernandez, 2008)

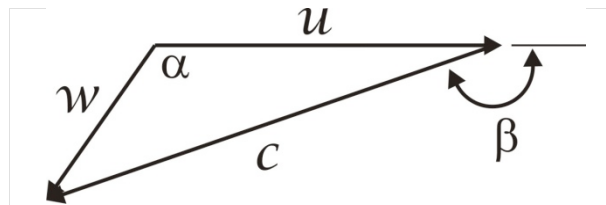


Ilustración 9. Diagrama típico de velocidad.

Fuente. Elaboración propia. Tomado de (White, 2003)

El agua penetra en el rodete con una velocidad absoluta c_1 y ángulo α_1 la velocidad relativa w_1 forma un ángulo β_1 (ángulo del alabe a la entrada), con la velocidad tangencial u_1 , la velocidad relativa es tangente al alabe en todo momento. (Ver Ilustración 11)

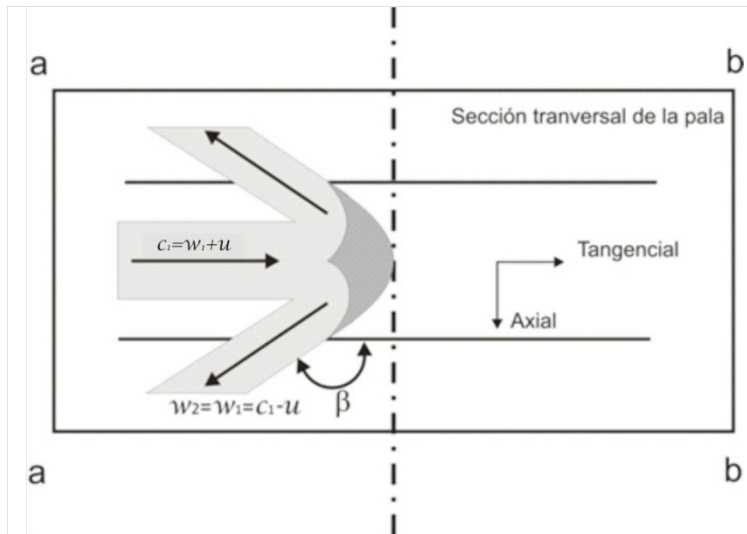


Ilustración 10. Sección transversal de la pala.

Fuente. Elaboración propia. Tomado de(Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009)

A la salida de cada alabe, el agua lo hace con una velocidad absoluta C_2 siendo w_2 la velocidad relativa y u_2 la velocidad tangencial, en esta segunda posición. (Ver Ilustración 11)

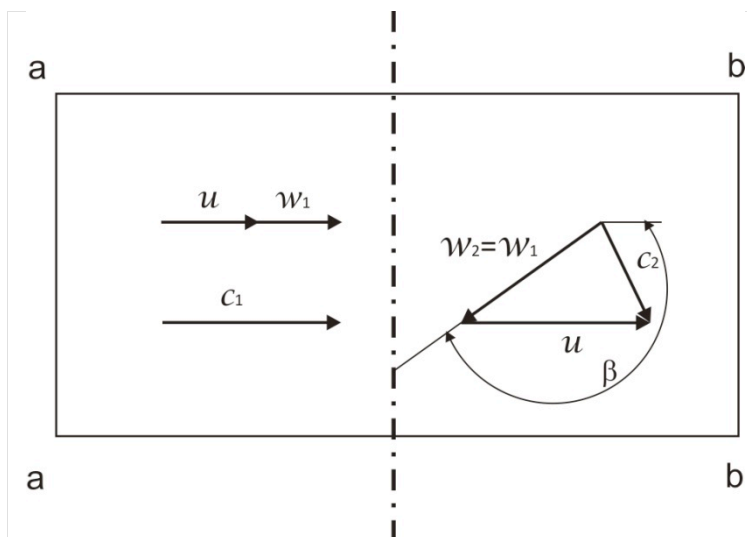


Ilustración 11. Triángulos de entrada y de salida para una turbina Pelton.

Fuente. Elaboración propia. Tomado de(Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009)

Los triángulos de velocidades a la entrada y a la salida en el radio medio, r_m , son asumidas como se muestra en la Ilustración 11. Además se considera que:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 = u; \text{ donde } u = r\omega \text{ ya que el diámetro del rotor permanece constante.} \\ \beta_1 &= 0 \text{ y } \beta_2 = 180; \text{ para el máximo rendimiento} \\ w_2 &= \psi w_1, \text{ con } \psi < 1; \text{ Donde } \psi \text{ es el coeficiente de reducción de velocidad (ver} \\ &\text{demostración más adelante)} \\ C_1 &= (2gH)^{1/2} = w_1 + u \\ C_2 &= w_2 \cos \beta_2 + u \end{aligned}$$

Idealmente las palas devuelven el vector de velocidad relativa con un ángulo de 180, (para extraer la máxima energía posible del fluido) pero por limitaciones físicas se indica que β debe ser menor que 180. Por esta razón el fluido sale con un componente axial, que se indica en la Ilustración 11.

Para calcular el torque y la potencia mecánica en el eje se debe conocer los componentes axiales de la velocidad absoluta a la entrada y la salida (Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009), C_1 y C_2 , respectivamente.

1.3.2 Fuerza en la pala

La fuerza de reacción en la pala (Fernandez, 2008), teóricamente es:

$$F = \frac{\gamma Q}{g} (w_2 \cos \beta_2 - w_1 \cos \beta_1) \quad [\text{N}]$$

Ecuación 18. Fuerza de reacción en la pala

Fuente: (Fernandez, 2008)

Donde:

γ = peso específico del agua; $\gamma = \rho g$ [kg/ms]

Q = Caudal; $Q = A C_1$ [m³/s]

La fuerza máxima se obtiene cuando la velocidad relativa del fluido a la entrada es igual a la de salida (sin fricción), entonces $w_2 = w_1$, con $\psi = 1$. Por lo que resulta:

$$F_{\max} = \frac{\gamma Q}{g} (C_1 - u) (1 + \psi) \quad [\text{N}]$$

$$F_{\max} = \frac{2\gamma Q}{g} (c_1 - u) \quad [\text{N}]$$

$$F = \frac{\gamma Q}{g} (c_1 - u) (1 - \cos\beta) \quad [\text{N}]$$

Ecuación 19. Fuerza en la pala

Fuente: (Fernandez, 2008)

De ahí que al reemplazar $\rho = \gamma/g$, se obtiene:

$$F = \rho Q (c_1 - u) (1 - \cos\beta) \quad [\text{N}]$$

Ecuación 20. Fuerza en la pala

Fuente: (White, 2003)

$$P_r = \rho Q u (c_1 - u) (1 - \cos\beta) \eta_r \quad [\text{W}]$$

1.3.3 Demostración de Potencia máxima en el eje

De acuerdo con las consideraciones de potencia mecánica (Numeral 1.1.6) de la Ecuación 11 y la Ecuación 20 se tiene que:

$$P = F u = \frac{\gamma Q}{g} u (c_1 - u) (1 + \cos\beta) \quad [\text{W}]$$

$$P = F u = \frac{2\gamma Q}{g} (c_1 - u) u \quad [\text{W}]$$

Siendo la expresión de potencia máxima, para $\beta=180$:

$$P_{\max} = \frac{\partial P}{\partial u} = 0$$

Ecuación 21. Potencia mecánica (fuerza de reacción)

Fuente: (Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009)

Considerando que el punto de potencia máxima se da cuando la derivada de dicha función equivale a cero, al igualar la Ecuación 21 a cero, se obtiene que el valor de velocidad tangencial (u) para este punto equivale a la mitad de la velocidad absoluta (c), tal como lo muestra la Ecuación 22.

$$u_{@ \max P} = \frac{c_1}{2}$$

Ecuación 22. Velocidad tangencial máxima

Fuente: (Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009)

En la Ilustración 12 se aprecia el comportamiento de potencia bajo un régimen transitorio, en el que la velocidad tangencial (u) varía de acuerdo con un factor α , donde $0 < \alpha < 1$. De ahí que para el punto de máxima potencia $\alpha=0,5$, es decir la mitad de la velocidad absoluta.

Por otro lado el torque es inversamente proporcional al aumento de la velocidad tangencial (u), es decir entre más rápido gira el rotor menor es el torque en el eje.

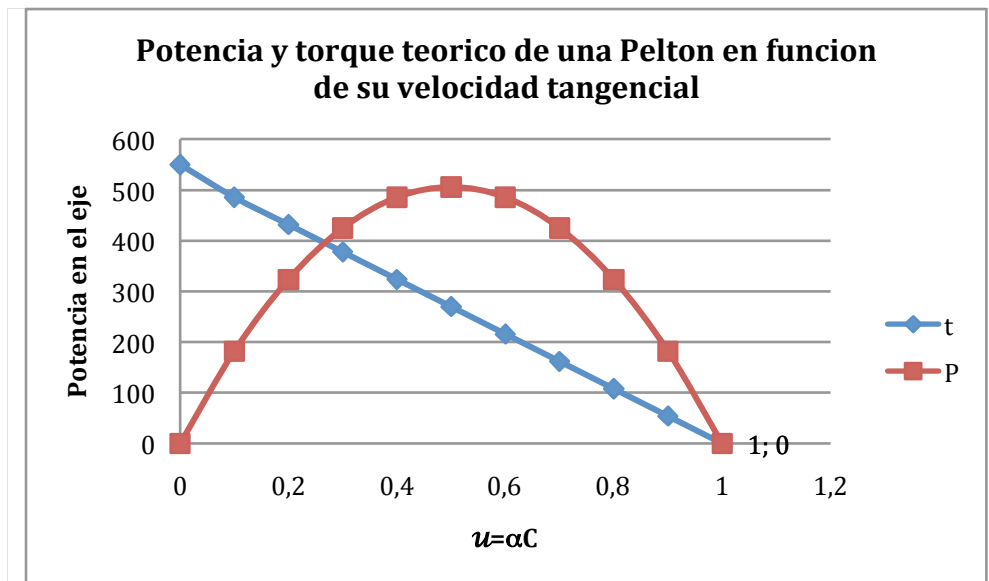


Ilustración 12. Potencia y torque en el eje.

Fuente. Elaboración propia. Tomado de(Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009)

Considerando el análisis anterior y la expresión de potencia máxima (1.2), la expresión para la potencia máxima en el eje resultante es:

$$P = F \quad u = \frac{2\gamma Q}{g} (c_1 - u) u$$

$$P_{\max} = \frac{2\gamma Q}{g} (c_1 - c_1/2) c_1/2$$

$$P_{\max} = \frac{2\gamma Q}{G} (c_1^2/2 - c_1^2/4)$$

$$P_{\max} = \gamma Q \frac{c_1^2}{2g}$$

$$P_{\max} = \gamma Q H \quad [W]$$

Ecuación 23. Potencia máxima (Pelton)

1.3.4 Torque en el eje

Para el cálculo de torque se consideran los componentes tangenciales de las velocidades absolutas (Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009), y se simplifica la nomenclatura de las velocidades con $\beta_1 = \beta_2$ entonces:

$$C_2 - C_1 = (C_1 - u)(1 - \cos\beta)$$

Este cambio en el componente tangencial de la velocidad combinado las ecuaciones de torque (Numeral 1.1.2) resulta:

$$T_{\text{eje}} = m r (C_1 - u)(1 - \cos\beta) \quad [\text{Nm}]$$

Donde:

$$m = \rho Q \quad [\text{kg/ms}]$$

$$u = \omega r \quad [\text{m/s}]$$

$$T_{\text{eje}} = \rho Q r (C_1 - u)(1 - \cos\beta) \quad [\text{Nm}]$$

Ecuación 24. Torque (velocidad tangencial)

Fuente.(Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009)

Esta ecuación combinada con la ecuación de potencia mecánica (Ver Ecuación 12) permite expresar, de otra manera, la potencia en el eje como:

$$P = M \omega = T_{\text{eje}} \omega$$

$$P_r = \rho Q u (C_1 - u)(1 - \cos\beta)$$

Ecuación 25. Potencia en el rotor

Fuente.(Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009)

Si se reemplaza la Ecuación 22, se tiene:

$$P_{\text{eje}} = 0.25 \rho Q C_1^2 (1 - \cos\beta)$$

Ecuación 26. Potencia (velocidad absoluta)

Fuente: (Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009)

Si se considera $\beta=180$ para el punto máximo de potencia, entonces $(1-\cos\beta)=2$. Es posible modificar la Ecuación 26 respectivamente:

$$P_{eje} = 2\rho Q (C_1 u - u^2)$$

Ecuación 27. Potencia ($\beta=180$)

Fuente: (Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 2009)

$$P_{eje} = \frac{1}{2} \rho Q C_1^2 \text{ [W]}$$

$$P_{eje} = \frac{1}{2} \rho A C_1^3 \text{ [W]}$$

Ecuación 28. Potencia máxima (velocidad absoluta)

Fuente: elaboración propia.

1.3.5 Eficiencia total y perdidas en una turbina hidrocinética

En el caso de las ruedas Pelton, White indica que la velocidad absoluta C_1 , que entra a la rueda está dada por $C_1 = C_v(2gH)^{1/2}$, donde C_v es un coeficiente de velocidad que representa la pérdida de velocidad absoluta de entrada, entre un 8 y 2 %, entonces $(0.92 < \eta < 0.98)$.

Sabiendo esto, la eficiencia teórica de una turbina de impulso es:

$$\eta = 2(1 - \cos\beta)\phi(C_v - \phi)$$

Ecuación 29. Eficiencia del rotor.

Fuente: (White, 2003)

Donde:

$$\phi = u/(2gH)^{1/2}$$

$$u = 2\pi nr \text{ [m/s]}$$

n = Revoluciones por minuto [rpm]

r = radio de trabajo [m]

Y la máxima eficiencia ocurre cuando $\phi = 1/2$ $C_v = 0.47$. (White, 2003)

En conclusión, unas condiciones ideales de operación serían: $\beta=180$, $C_v=1.0$ y $\phi=0.5$; y unas condiciones típicas de operación: $\beta=160$, $C_v=0.94$ y $\phi=0.47$, para $\eta_{\max}=85\%$. (White, 2003)

Sin embargo de acuerdo con Maldonado, el coeficiente de potencia (C_p) es de 0.33, para una máquina que opera bajo fuerzas de arrastre, tales como una rueda hidráulica que flota en una corriente libre (Maldonado, 2005). Lo que para el caso se conoce como Coeficiente de Arrastre ($C_a=0.33$).

De acuerdo con lo anterior, esta por probar experimentalmente para el diseño de la turbina hidro-cinética el valor de η_r , que podría estar entre $0.33 < \eta_r < 0.85$

En cuanto a la eficiencia de la transmisión, que está determinada por elementos de transmisión mecánica se puede considerar: $0.85 < \eta_{tr} < 0.95$.

Finalmente la eficiencia indicada para un generador de imanes permanente podría ser: $0.66 < \eta_g < 0.75$ (Maldonado, 2005)

$$P_e = \rho Q u (c_1 - u)(1 - \cos\beta)\eta_t \quad [\text{W}]$$

$$P_e = \frac{1}{2} \rho A C_1^3 \eta_t \quad [\text{W}]$$

Ecuación 30. Potencia efectiva de turbina hidrocinética

Fuente: elaboración propia.

1.4 CONCLUSIONES DEL MÉTODO ANALÍTICO

- Las variables independientes para las expresiones de potencia son el área y la velocidad. Sin embargo en el modelo teórico propuesto por (Behrens, 2005), se propone un área en función de la velocidad.
- El método analítico demostró una relación entre las diferentes expresiones de Potencia:

$$P = \frac{1}{2} \rho Q v^2 \quad [\text{W}]$$

$$P_{eje} = \frac{1}{2} C_D \rho A v^3 \quad [\text{W}]$$

$$P_e = \frac{1}{2} \rho A v^3 \eta_T \text{ [W]}$$

$$P_e = \gamma Q H \eta_T \text{ [W]}$$

$$P = F u = \frac{2\gamma Q}{g} (c_1 - u) u \quad \text{[N]}$$

$$P_r = \rho Q u (c_1 - u) (1 - \cos\beta)$$

$$P_{eje} = 0.25 \rho Q c_1^2 (1 - \cos\beta)$$

$$P_{eje} = \frac{1}{2} \rho A c_1^3 \text{ [W]}$$

1.5 MODELO ANALÍTICO DEL ROTOR DISEÑADO

A continuación, en la Ilustración 13 presentan las expresiones de potencia para cada etapa de transformación de energía siguiendo el orden propuesto en la estructura funcional del sistema y tomando las expresiones de potencias identificadas por medio del método analítico.

Vale aclarar que para dimensionar el rotor fue necesario considerar la potencia y eficiencia de los demás componentes, para que a pesar de la pérdidas de energía la potencia efectiva alcanzará el valor esperado.

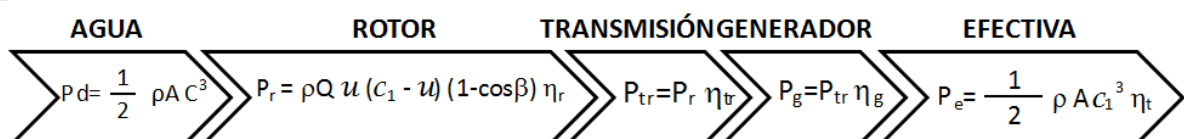


Ilustración 13. Ecuaciones en el proceso de transformación de energía

Fuente.Elaboración propia.

De acuerdo con la Ilustración 13, el modelo se expresa en función de la velocidad disponible en el fluido; por esta razón para resolver las ecuaciones presentadas, se asumieron los valores expresados en la Tabla 5.

Tabla 5. Valores de entrada del modelo analítico.

Parámetro	Unidades	Descripción	Valor
c	[m/s]	Velocidad absoluta del fluido ²	1,5
C_{min}	[m/s]	Velocidad mínima	1,5
C_{max}	[m/s]	Velocidad máxima	2
g	[m/s ²]	Coefficiente de gravedad	9,8
ρ	[kg/m ³]	Densidad del Agua	1000
γ	[kg/m ³][m/s ²]	Peso específico del agua	9800

Fuente. Elaboración propia.

En este orden de ideas, para estimar las demás variables expresadas en la Ilustración 5, el modelo se dividió en dos fases: (1) Dimensiones del Rotor y (2) Rotor en movimiento.

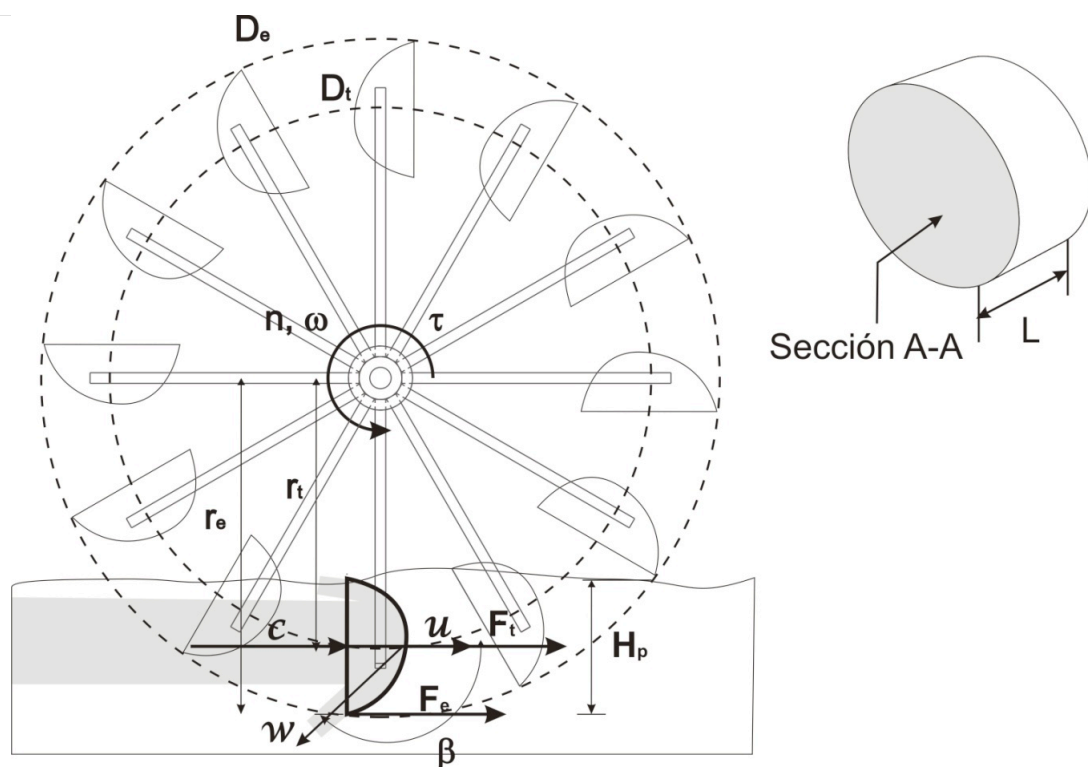


Ilustración 14. Modelo analítico del rotor acción

Fuente. Elaboración propia.

²Los valores de velocidad se asumieron con base en el análisis hidrológico (Ver Anexo B) y estimativos de las pruebas de campo (Ver Anexo F)

1.5.1 Dimensiones del rotor

Como se indica en la Tabla 6, en esta fase se estimaron los valores correspondientes dimensiones del rotor en función de la velocidad absoluta C.

Tabla 6. Dimensiones del rotor.

	Parámetro	Ecuación	Unidades	Descripción	Valor
Dimensiones del rotor	H	$H = \frac{C_1^2}{2g}$	[m]	Cabezal de presión (dinámico)	0,1148
	H _p	$H_p = \frac{((C_{max}+C_{min})/2)^2}{2g}$	[m]	Cabezal de presión medio	0,16
	H _{max}	$H_{max} = \frac{C_{max}^2}{2g}$	[m]	Cabezal de presión máximo	0,20
	S	$S = H_p$	[m]	Longitud sumergida	0,16
	D	$D = 5H_p$	[m]	Diametro externo del	0,8
	r _e	$r = D/2$	[m]	Radio externo	0,4
	r _t	Dato de entrada	[m]	Radio de trabajo Centro de masa del volumen de control	0,3
	D _t	$D_t = 2r_t$	[m]	Diametro de trabajo	0,6
	P _{et}	$P_{et} = D_t \pi$	[m]	Perimetro de trabajo	1,95
	P _e	$P_e = D \pi$	[m]	Perimetro	2,45
	z	$z = P_e / H_{max}$	[#]	Número de palas	12
	L	Dato de entrada	[m]	Longitud del rotor	1,22
	A	$A = S * L$	[m ²]	Área de la pala (superficie de control)	0,195

Fuente. Elaboración propia.

1.5.1.1 Profundidad de las palas (S)

Esta distancia es igual al cabezal de presión (Behrens, 2005). En este caso se asumió el valor equivalente al cabezal promedio.

1.5.1.2 Diámetro del Rotor (D)

El diámetro óptimo del rotor equivale de tres a seis veces el cabezal de presión (Behrens, 2005). De acuerdo con esto se calculó el diámetro externo del rotor D del cual se deriva el radio externo r_e , y el perímetro externo P_e .

1.5.1.3 Número de palas (z)

El número de palas z está determinado por el espacio entre palas, el cual se estimó como una distancia equivalente al cabezal máximo de presión H_{max} .

1.5.1.4 Radio de trabajo (r_t)

Este valor equivale a la distancia entre el centro de masa del volumen de control y el centro del rotor (en una pala plana, el centro de masa se ubica a la mitad de la longitud sumergida).

Aparte de lo anterior, la longitud (L) es la variable que define el área de control y la potencia que el rotor puede entregar (Behrens, 2005). Por esta razón, en la Tabla 7 se presentan los diferentes valores de longitud estimados según las horas de operación que la turbina debe tener para satisfacer la demanda energética para la cual está diseñada.

Para esto se asumieron los menores valores de eficiencia indicados en la Tabla 8, tomando los valores más críticos presentados en el método analítico.

Tabla 7. Estimación de la longitud del rotor.

Tiempo de Operación (h)	Potencia (Wh/día)	Área (m ²) $A = 2P/\rho C^3 \eta_t$	Longitud (m)
4	397	1,20	7,49
6	264,7	0,80	4,99
8	198,5	0,60	3,74
10	158,8	0,48	3,00
12	132,3	0,40	2,50
14	113,4	0,34	2,14
18	88,2	0,27	1,66
20	79,4	0,24	1,50
24	66,2	0,20	1,25

Fuente. Elaboración propia.

De acuerdo con lo anterior, se seleccionó el escenario de operación de 24 horas con una longitud $L=1,25$ m, con la cual, teóricamente es posible alcanzar una potencia diaria 1,58 kWh/día con una potencia efectiva, $P_e = 66,2$ (Wh). Esta decisión responde principalmente a las especificaciones de diseño de producto en cuanto al tamaño, ya que para menores horas de operación el rotor sería relativamente largo.

1.5.2 Análisis dimensional del rotor en movimiento

En esta fase se estimaron los valores indicados en la Tabla 9, los cuales son estimaciones teóricas de velocidades, fuerzas, torque y potencia mecánica que un rotor con las dimensiones anteriormente estimadas puede entregar.

Para dichas estimaciones se asumieron los valores de eficiencias de la Tabla 8:

Tabla 8. Eficiencias del sistema.

Parámetro	Descripción	Cálculo
C_v	Coeficiente de velocidad	95%
η_T	Eficiencia del sistema	20%
η_r	Eficiencia del rotor	33%
η_{tr}	Eficiencia de la transmisión	85%
η_g	Eficiencia del generador	70%

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 9. Análisis dimensional del rotor en movimiento.

	Parámetro	Ecuación	Unidades	Descripción	Valor
Análisis del rotor en movimiento	n_r	$n = 60 C_1 / P_{et}$	[rpm]	Revoluciones por minuto reales (libre)	46
	n_e	$n = 60 C \eta_r / P_{et}$	[rpm]	Revoluciones por minuto experimentales (libre)	44
	ω	$\omega = n \pi / 30$	[rad/s]	Velocidad angular	4,84
	C	$C = \omega r_t$	[m/s]	Velocidad absoluta del fluido	1,50
	$u_{@max P}$	$u = \frac{C_1}{2}$	[m/s]	Velocidad tangencial en el punto de máxima potencia	0,75
	α	$0 < \alpha < 1$	[-]	Factor de relación	0,50
	u	$u = C \alpha$	[m/s]	Velocidad tangencial	0,75
	w	$w = C - u$	[m/s]	Velocidad relativa	0,75
	Q	$Q = A C$	[m ³ /s]	Caudal disponible	0,293
	T	$T = F_e r_e$ ó $T = F_t r_t$	[Nm]	Torque	54,92
	F_e	$F_e = \rho A C (C - u) (1 - \cos \beta) \eta_r$	[N]	Fuerza en el extremo de la pala	140,6
	F_t	$F_t = F_e \frac{r_e}{r_t}$	[N]	Fuerza de trabajo	177,2
	C_s	$1 < (1 - \cos \beta) < 2$	[-]	Coeficiente de salida del fluido, para $\beta=160$	1,94
	P_d	$P_d = \frac{1}{2} \rho A C^3$	[W]	Potencia disponible en el agua	329,4
	P_r	$P_r = F_t u C_v$	[W]	Potencia a la salida del rotor	126,52
	P_{tr}	$P_{tr} = P_r \eta_{tr}$	[W]	Potencia a la salida de la transmisión	107,54
	P_g	$P_g = P_{tr} \eta_g$	[W]	Potencia a la salida de la transmisión	75,28

Fuente. Elaboración propia.

1.5.2.1 Velocidad angular

Las revoluciones por minuto reales n_r , es la velocidad a la que gira el rotor sin pérdidas de energía, sin embargo existen pérdidas de energía representadas en el coeficiente de velocidad C_v . Por esta razón, adicionalmente se consideró el valor de revoluciones

por minuto experimentales n_e . Entonces, a partir de esto se calculó la velocidad angular ω .

1.5.2.2 Velocidad tangencial

Teórica y experimentalmente fue posible demostrar que el punto de máxima potencia se obtiene cuando gira aproximadamente a la mitad de la velocidad absoluta (c) que lo hace cuando gira libremente (sin carga)

Esto indica un cambio en la velocidad relativa del rotor, debido a un cambio de la velocidad tangencial u . Este cambio se representa como α , el cual varía entre 0 y 1, siendo $\alpha=1$ cuando el rotor gira libremente, $\alpha=0,5$ en el punto de máxima potencia y $\alpha=0$ cuando el rotor está completamente detenido por la carga. De ahí que $u = \alpha c$.

1.5.2.3 Momento angular

Se estimó el torque como un producto entre radio de trabajo r_t por la fuerza de trabajo F_t , o como el producto del radio de trabajo r_e por la fuerza en el extremo de la pala F_e . Entonces tenemos que:

$$T = F_e r_e$$

Ecuación 31. Torque en el eje.

$$T = F_t r_t$$

Ecuación 32. Torque en el eje.

1.5.2.4 Fuerza al extremo de pala

El método analítico se definió la potencia del rotor como:

$$P_r = \rho Q u (c_1 - u) (1 - \cos\beta) \quad [W]$$

De la cual se derivó la siguiente ecuación:

$$F = \rho Q (c - u) (1 - \cos\beta) \quad [N]$$

Por medio del método experimental (ver Anexo F), se estimó que esta ecuación podría equivaler a la fuerza que se hace al extremo de la pala F_e . Además se incluyó el coeficiente de eficiencia η_r del rotor. Entonces:

$$F_e = \rho Q (c_1 - u) (1 - \cos\beta) \eta_r \quad [N]$$

Ecuación 33. Fuerza externa

1.5.2.5 Fuerza de trabajo

Considerando como datos históricos, los obtenidos en las pruebas, se encontró la relación entre las fuerzas al extremo de la pala y la fuerza de trabajo, expresada como una relación entre los radios ³. Esto se obtiene al igualar las ecuaciones de torque.

$$F_t = F_e r_e / r_t \quad [N]$$

$$F_t = \frac{\rho A C_p (C - u) (1 - \cos \beta) \eta r}{r_t} \frac{r_e}{r_t}$$

Ecuación 34. Fuerza de trabajo [N].

De esta manera, se indican la importancia del coeficiente de salida del fluido **Cs**. Debido a que la fuerza depende del ángulo de salida β , el cual puede tener valores entre 90 y 160. Además, dicho ángulo influye notablemente en la forma de la pala. (Para ampliar la información ver método analítico)

1.5.2.6 Potencias del sistema:

La estimación de potencia mecánica se realizó por medio de la siguiente expresión:

$$P_r = F_t u C_v$$

Ecuación 35. Potencia del rotor.

Que con la ecuación Ecuación 34 se expresa como:

$$P_r = \frac{\rho A C_p u (C - u) (1 - \cos \beta) \eta r C_v}{r_t} \frac{r_e}{r_t}$$

Ecuación 36. Potencia del rotor

Conocida esta ecuación, para estimar la potencia a la salida de la transmisión y a la salida del generador se incluyeron los coeficientes de eficiencia respectivos (Ver Tabla 8). De ahí que la potencia efectiva del sistema P_e se expresa como:

³ Esta ecuación no está totalmente verificada y hasta el momento solo se aplicó para las pruebas realizadas.

$$P_e = \rho A C_u (C - u) (1 - \cos \beta) C_v \frac{r_e}{r_t} \eta_r \eta_{tr} \eta_g$$

Ecuación 37. Potencia efectiva.

1.6 BIBLIOGRAFÍA

Cálculo de una rueda Pelton: Tripod

*Articles: Backwoods Home Magazine*2005

*Fluid mechanics*2003BostonMcGraw-Hill

Fernandez, P. (2008). *Libros: Biblioteca sobre Ingeniería Energética*. Retrieved 20 de Enero de 2010 from Biblioteca sobre Ingeniería Energética: <http://libros.redsauce.net/>

*Fundamentals of Fluid Mechanics*2009IowaJonh Wiley & Sons

2008Hidraulica General

Hydraulic performance of an ancient Spanish watermill2010*Renewable Energy An International Journal* 35387 - 396

HYDROVOLTS. (2009). *HYDROVOLTS*. From HYDROVOLTS: www.hydrovolts.com

Jaramillo, M., & Raigosa, J. (2008). *SISTEMA DE COCCIÓN Y CALEFACCIÓN PARA HOGARES UBICADOS EN ZONAS AISLADAS SIN CONEXIÓN A LA RED ELÉCTRICA*. Medellin: Proyecto de grado.

Maldonado, F. (2005). *Monografías: SISBIB*. Retrieved 13 de Octubre de 2009 from SISBIB: http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtual/monografias/Basic/maldonado_qf/maldonado_qf.htm

*Potencia: Wikipedia*2008

*Principio de Bernoulli: Wikipedia*2009

Vera, F. (2002). *Caída de una esfera inmersa en un fluido viscoso*. Chile.